Об эквивалентности трёх моделей плоскости Лобачевского

А. Б. Сосинский

В этой заметке я хочу объяснить, почему три наиболее популярные модели плоскости Лобачевского (модель Пуанкаре на полуплоскости, модель Кэли — Клейна на диске и модель Пуанкаре на диске) эквивалентны. Сначала мы это увидим наглядно с помощью физических опытов со стеклянной игрушкой, а затем докажем строго математически.

Для доказательства нам придётся не только строго определить, в каком смысле следует понимать «эквивалентность» моделей, но и понять, что такое модель геометрии вообще. Мы увидим, что модель геометрии — это и есть геометрия в том смысле, как это слово расшифровал Феликс Клейн.

Начнём с краткого описания трёх моделей[1)] плоскости Лобачевского.

§ 1. Модель Пуанкаре на диске

Точки этой модели — это точки единичного открытого диска

$$\mathbb{H}^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\},$$

прямые — открытые дуги окружностей, ортогональные окружности

$$\mathbb{A} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\},$$

ограничивающей наш диск, а также (открытые) диаметры окружности $\mathbb{A}$; окружность $\mathbb{A}$ называется *абсолютом*, и её точки не являются точками нашей «плоскости Лобачевского».

На множестве $\mathbb{H}^2$ с помощью явной (но совсем не очевидной) формулы вводится расстояние между точками, что позволяет измерять длины, углы,

[1)] Я сохраняю за этими моделями их традиционные названия, но подчёркиваю, что эти наименования не справедливы: все три модели придумал и опубликовал (в 1868 году) итальянский математик Бельтрами.

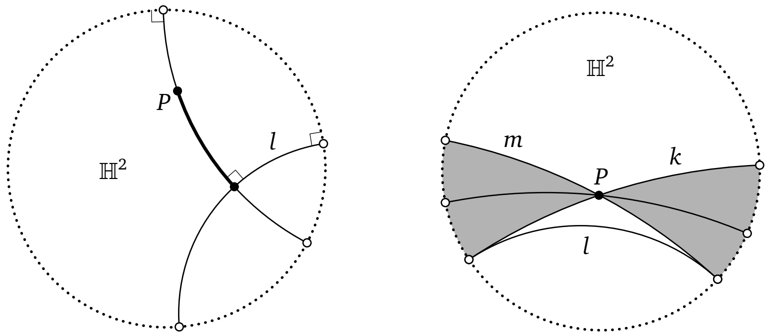


Рис. 1. Перпендикуляр и параллели в модели Пуанкаре на диске

площади и вообще строить геометрию на плоскости Лобачевского. При этом главную роль играет группа $G_{\mathbb{C}}$ изометрий этой «плоскости» (т. е. биективных преобразований множества $\mathbb{H}^2$, сохраняющих расстояние).

Однако здесь можно обойтись без сложной формулы для расстояний. Дело в том, что группу $G_{\mathbb{C}}$ можно определить чисто геометрически: она порождается отражениями относительно «прямых», т. е. инверсиями относительно окружностей, ортогональных абсолюту, и (обычными) отражениями относительно диаметров. Дальнейшая теория развивается без всяких формул и координат на основании свойств инверсии (читатель может познакомиться с этим по моей книге «Геометрии»[2], посмотрев страницы 116–128).

Здесь мы ограничимся двумя картинками: одна изображает перпендикуляр, опущенный из точки P на «прямую» l (рис. 1, слева), а вторая (классическая!) картинка изображает две прямые m, k, проходящие через точку P и называемые *параллелями* к прямой l, между которыми располагаются все прямые, проходящие через P и не пересекающие l (рис. 1, справа).

§ 2. Модель Пуанкаре на полуплоскости

Точки этой модели — это точки открытой полуплоскости комплексной переменной

$$\mathbb{C}^+ = \{z = x + iy \in \mathbb{C}\colon\ \mathrm{Im}(z) = y > 0\},$$

прямые — открытые полуокружности с центром на вещественной оси $\mathrm{Im}(z) = y = 0$, а также вертикальные полупрямые

$$\{z = x + iy \in \mathbb{C}\colon x = \mathrm{const},\ y > 0\}.$$

[2] *Сосинский А. Б.* Геометрии. М.: МЦНМО, 2017.

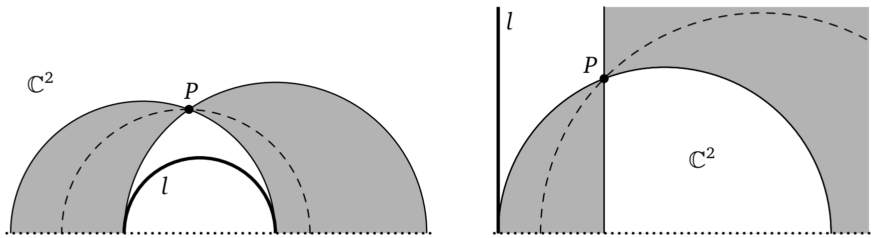


Рис. 2. Параллели в модели Пуанкаре на полуплоскости

Прямая $\mathbb{A}=\{z=x+iy\in\mathbb{C}\colon y=0\}$ называется *абсолютом*, её точки не являются точками нашего нового варианта «плоскости Лобачевского». Здесь тоже можно ввести расстояние с помощью явной формулы (в которую входят комплексные параметры), но можно определить группу $G_{\mathbb{R}}$ изометрий рассматриваемой модели чисто геометрически: она порождается отражениями относительно «прямых», т. е. (обычными) отражениями относительно вертикальных прямых или инверсиями относительно окружностей с центрами на оси Ox. Предлагаем читателю снова посмотреть на классическую картинку с параллельными (рис. 2).

§ 3. Модель Кэли — Клейна на диске

Точки этой модели — это точки единичного открытого диска

$$\mathbb{D}^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 < 1\},$$

прямые — открытые хорды диска, *абсолют* — край диска. Здесь изометрии удобнее определять через расстояние, которое вводится как логарифм некоторого двойного отношения. Я не буду вдаваться в детали и ограничусь изображением странного вида перпендикуляра в этой метрике и классической картинкой с параллелями (рис. 3).

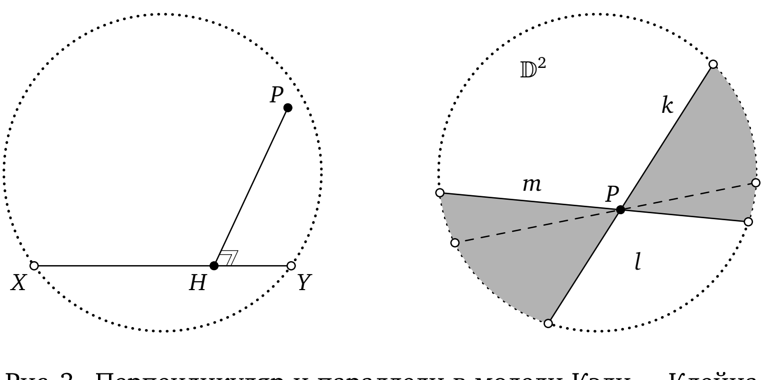
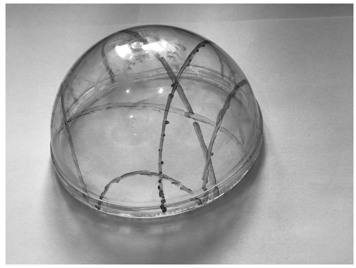


Рис. 3. Перпендикуляр и параллели в модели Кэли — Клейна

§ 4. Эксперименты с игрушкой

Сама игрушка представляет собой полусферу радиуса 5 см, сделанную из прозрачной пластмассы; на ней нарисованы полуокружности, ортогональные границе полусферы (см. фото); эту граничную окружность мы будем называть *экватором*. Можно считать, что полуокружности высечены из полусферы вертикальными плоскостями.

Покажем, как из этой игрушки можно получить модель Пуанкаре на диске. Для этого нам потребуется небольшой фонарик и стол в достаточно тёмной комнате. На стол положим лист белой бумаги, в его середину положим нашу полусферу (обозначим её S) экватором вверх, а источник света поместим на место «северного полюса» сферы (она касается стола «южным полюсом»). Что же мы тогда увидим?



Фотография игрушки

На листе белой бумаги появится диск (его мы обозначим D) радиуса 10 см с дугами окружностей, ортогональными его границе. Это и есть диск модели Пуанкаре! При нашей световой стереографической проекции экватор перейдёт в абсолют (=край) диска Пуанкаре D, полуокружности на полусфере перейдут в «прямые» модели Пуанкаре, и мы получим биекцию (обозначим её α) между точками полусферы S и точками диска D (рис. 4).

А теперь покажем, как из игрушки можно получить модель Пуанкаре на полуплоскости. Для этого мы постелим на стол большой белый лист

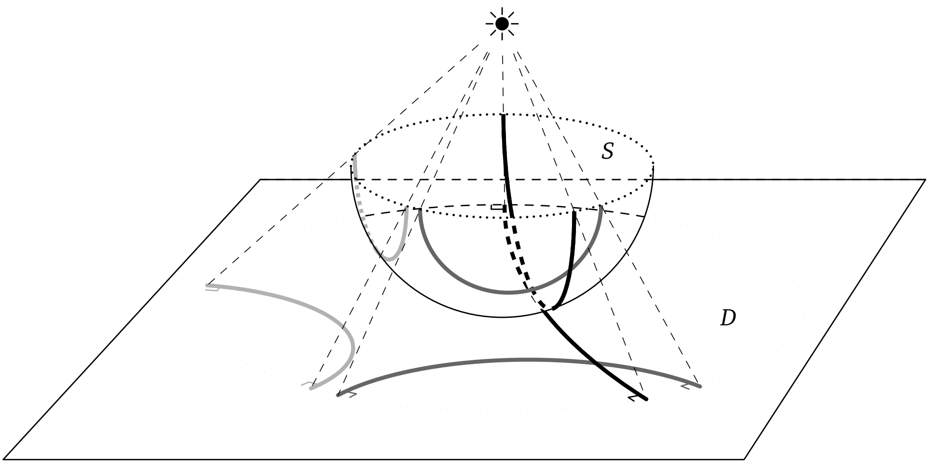


Рис. 4. Получаем модель Пуанкаре на диске

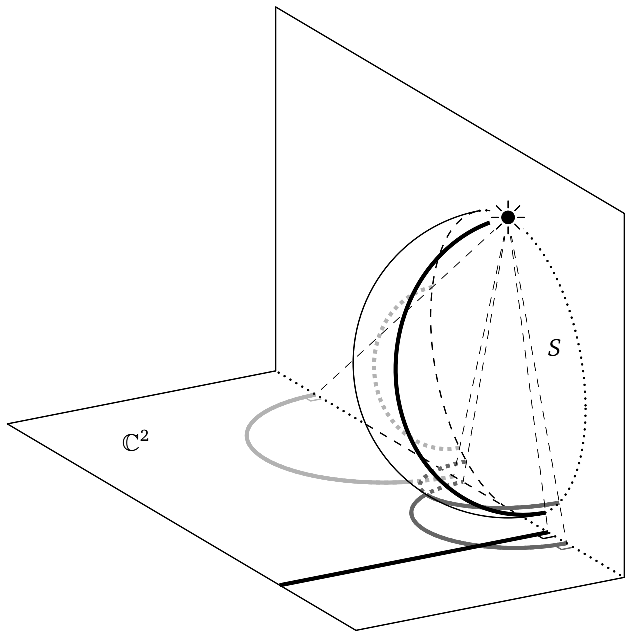


Рис. 5. Получаем модель Пуанкаре на полуплоскости

бумаги и приставим стол к стене комнаты. К стене мы прислоним нашу полусферу (снова обозначим её S) так, чтобы экватор прилегал к стене (чтобы полусфера не падала, её можно приклеить), и поместим источник света в самой верхней точке полусферы (рис. 5).

Тогда на столе появится изображение модели Пуанкаре на полуплоскости (мы обозначим её $\mathbb{C}^+$), вернее, её кусок — стол наш не бесконечен! При этом экватор перейдёт в абсолют полуплоскости (это прямая, по которой стол примыкает к стене), а полуокружности на S перейдут в «прямые» модели $\mathbb{C}^+$. Здесь, как и в предыдущем опыте, важную роль играет тот факт, что при стереографической проекции сохраняются углы, в частности сохраняется перпендикулярность. Мы получим биекцию (обозначим её β) между точками полусферы S и точками «бесконечного стола» $\mathbb{C}^+$.

А теперь легко показать эквивалентность двух моделей Пуанкаре: отображение $\beta \circ \alpha^{-1}: D \to \mathbb{C}^+$ превращает одну модель в другую, один абсолют в другой, «прямые» из модели на диске D в «прямые» из модели на полуплоскости $\mathbb{C}^+$.

А как из нашей игрушки получить модель Кэли — Клейна? А очень просто: наш лист белой бумаги мы вешаем на стену, полусферу (снова обозначенную S) устанавливаем в метре от стены так, чтобы плоскость

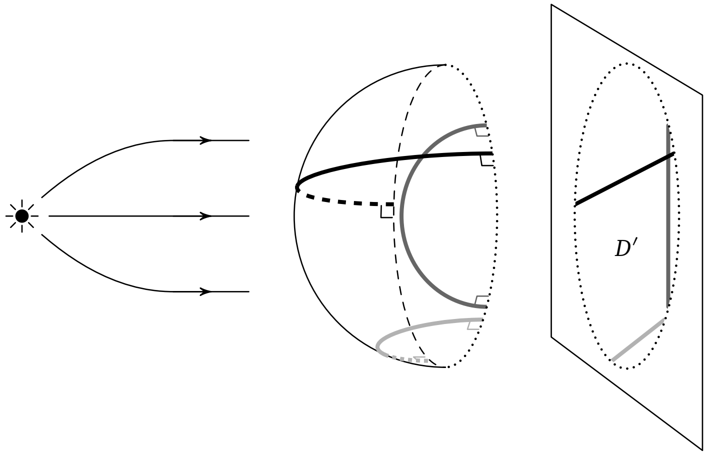


Рис. 6. Получаем модель Кэли — Клейна

её экватора была параллельна стене, а у противоположной стены (т. е. на достаточно большом расстоянии) включаем мощный точечный источник света (маленький фонарик тут не годится). Тогда на нашем листе бумаги появится изображение модели Кэли — Клейна в виде диска радиуса чуть больше 5 см (его мы обозначим D'). При этом экватор перейдёт в абсолют (край диска D'), а полуокружности на S перейдут в «прямые» модели Кэли — Клейна, т. е. в хорды диска D' (рис. 6). Мы получим биекцию (обозначим её γ) между точками полусферы S и точками модели Кэли — Клейна D'.

Теперь легко показать эквивалентность двух моделей на диске: она задаётся формулой $\alpha \circ \gamma^{-1} : D' \to D$.

Таким образом, мы наглядно установили эквивалентность трёх моделей плоскости Лобачевского и увидели, как одна модель переходит в другую с помощью нашей игрушки. А теперь мы хотим это доказать строго математически. Для этого нам потребуется два формальных определения: геометрии по Клейну и эквивалентности (=изоморфизма) геометрий.

§ 5. Геометрии по Клейну

Геометрий много. Так что же такое геометрия, что есть общего между двумерными геометриями Евклида, Лобачевского, Римана, Кокстера, проективной геометрией, сферической геометрией? Ответ на этот вопрос дал Феликс Клейн в знаменитой лекции, вошедшей в историю под названием «Эрлангенская программа».

На современном языке ответ Клейна кратко можно пересказать так: *геометрией* (*по Клейну*) называется множество, на котором биекциями действует некоторая группа. Подробнее это можно пересказать так: *геометрия по Клейну* (или короче — просто *геометрия*) — это пара $\langle X : G\rangle$, где X — множество произвольной природы (его элементы называются *точками*), а G — группа, действующая на множестве X; это значит, что любой элемент $g \in G$ представляет собой биекцию множества X на себя, нейтральный элемент $e \in G$ — тождественное отображение, обратный элемент $g^{-1} \in G$ — обратная биекция к g, произведение двух элементов группы G — просто композиция биекций.

Посмотрим, как это выглядит для перечисленных выше геометрий. Для евклидовой геометрии X — это множество $X = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$ пар вещественных чисел, а G — группа отображений X на себя, сохраняющих расстояние d между точками, где

$$d((x, y), (x', y')) = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}.$$

Для двух моделей Пуанкаре мы уже описали X как открытый диск и полуплоскость соответственно, а G — как группу, порождённую отражениями относительно «прямых» (т. е. инверсиями и обычными отражениями, см. выше). Эти группы мы обозначили $G_{\mathbb{R}}$ для модели на полуплоскости и $G_{\mathbb{C}}$ для модели на диске. Таким образом, сами модели мы будем обозначать $\langle \mathbb{C}^+ : G_{\mathbb{R}}\rangle$ и $\langle \mathbb{H}^2 : G_{\mathbb{C}}\rangle$.

Для проективной плоскости точки множества X можно описать однородными координатами $(x : y : z)$, т. е. тройками вещественных чисел, которые не все равны нулю и заданы с точностью до ненулевого общего множителя (так что $(x : y : z)$ и $(\lambda x : \lambda y : \lambda z)$ при $\lambda \neq 0$ задают одну и ту же точку). Здесь группа G — группа двумерных проективных преобразований; каждое такое преобразование можно задать невырожденной матрицей 3×3, которая обычным образом действует на тройки (x, y, z), но результат действия определяется с точностью до множителя $\lambda \neq 0$, т. е. задаёт точку из X её однородными координатами.

Я не буду описывать в этих терминах модель Кэли — Клейна и геометрии Кокстера. Любознательный читатель может ознакомиться с этими вопросами в цитированной выше книжке «Геометрии».

§ 6. Эквивалентность геометрий

Пусть даны две геометрии $\langle X : G\rangle$ и $\langle Y : H\rangle$. Что значит, что они эквивалентны? Коротко это можно сказать так: должна существовать биекция между множествами точек X и Y и изоморфизм групп G и H, которые согласованы между собой. На современном формальном математическом языке это можно выразить так: две геометрии $\langle G : X\rangle$ и $\langle H : Y\rangle$ называются *изоморфными*, если существует биекция $\beta\colon X\to Y$ и изоморфизм групп $\phi: G\to H$, такие, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\beta} & Y \\ \downarrow{\scriptstyle g} & & \downarrow{\scriptstyle \phi(g)} \\ X & \xrightarrow{\beta} & Y \end{array}$$

коммутативна; это значит, что для любой точки $x\in X$ и для любого элемента группы $g\in G$ мы имеем $\beta(xg)=(\beta(x))\phi(g)$, т. е. две прогулки по диаграмме $x\mapsto xg\mapsto\beta(xg)$ и $x\mapsto\beta(x)\mapsto(\beta(x))\phi(g)$ приводят в одну и ту же точку.

Для тех читателей, которые не боятся современного математического языка, отмечу, что данное выше определение изоморфизма геометрий является частным случаем изоморфизма в теории категорий. Дело в том, что геометрии по Клейну образуют категорию: её объекты — геометрии $\langle X : G\rangle$, её морфизмы (их называют эквивариантными отображениями) — это пары (β,ϕ), где $\beta\colon X\to X'$ — отображение и $\phi: G\to G'$ — гомоморфизм групп, такие, что выполняется соотношение $\beta(xg)=(\beta(x))\phi(g)$, которое мы только что выписывали выше. Но я отвлёкся — пора вернуться к нашим моделям и доказательству их эквивалентности, т. е. их изоморфизма как геометрий по Клейну.

§ 7. Доказательство эквивалентностей

Докажем сначала, что модели Пуанкаре на диске и на полуплоскости эквивалентны, т. е. что геометрии $\langle\mathbb{H}^2 : G_{\mathbb{C}}\rangle$ и $\langle\mathbb{C}^+ : G_{\mathbb{R}}\rangle$ изоморфны. Для этого нам надо построить биекцию $\beta:\mathbb{H}^2\to\mathbb{C}^+$ и изоморфизм $\phi: G_{\mathbb{C}}\to G_{\mathbb{R}}$ такие, что $\beta(xg)=(\beta(x))\phi(g)$. Сделаем мы это так. Будем рассматривать диск $\mathbb{H}^2$ как лежащий в плоскости комплексной переменной $\mathbb{C}$ (т. е. считать, что $\mathbb{H}^2=\{z\in\mathbb{C}\colon |z|<1\}$) и определим β формулой

$$\beta : z\mapsto i\cdot\frac{1+z}{1-z},$$

а ϕ зададим так: $G_{\mathbb{C}}\ni g\mapsto\beta\circ g\circ\beta^{-1}=:\phi(g)\in G_{\mathbb{R}}$. То, что β действительно является биекцией диска на полуплоскость, — это простое и популярное упражнение из начального курса комплексного анализа, а то, что ϕ — изоморфизм, удовлетворяющий условию $\beta(xg)=(\beta(x))\phi(g)$, сразу следует из определения.

Доказательство того, что модель Пуанкаре на диске изоморфна (как геометрия по Клейну) модели Кэли — Клейна, мы оставляем читателю.

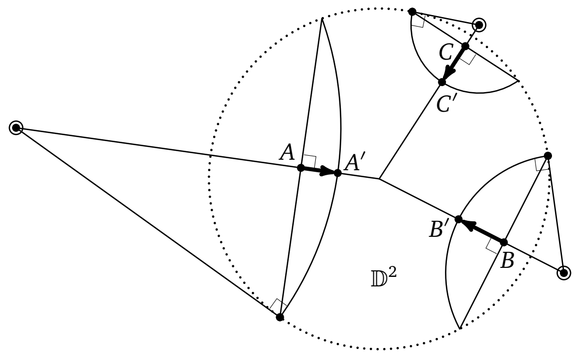


Рис. 7. Построение биекции $\beta: \mathbb{D}^2 \to \mathbb{H}^2$

На рис. 7 в качестве подсказки показано, как можно построить биекцию $\beta: \mathbb{D}^2 \to \mathbb{H}^2$. Если этой подсказки не хватит, читатель может всё это посмотреть в пунктах 10.1.2 и 10.1.3 цитированной выше книжки «Геометрии».

§ 8. Замечания про игрушку

На самом деле наша игрушка — в сущности — просто *модель плоскости Лобачевского на полусфере*, т. е. ещё одна геометрия по Клейну, изоморфная трём рассмотренным. Давайте дадим ей строгое определение.

Модель на полусфере — это геометрия по Клейну $\langle S : G_S \rangle$, точки которой суть точки открытой (т. е. без края) единичной полусферы S, а группа G_S определяется следующим образом. Как абстрактная группа, она изоморфна группе $G_{\mathbb{C}}$ (см. § 5); этот изоморфизм мы зафиксируем и обозначим $\sigma: G_S \to G_{\mathbb{C}}$. Группа G_S действует на полусферу S так: для любых $g \in G_S$ и $s \in S$

$$sg := \alpha^{-1}\big(\sigma(g)(\alpha(s))\big),$$

где $\alpha: S \to D$, биекция полусферы на диск Пуанкаре D, была определена в § 4. Ясно, что «прямые» в этой модели — это полуокружности, высекаемые на S плоскостями, перпендикулярными плоскости края S, и этот край играет роль абсолюта.

А откуда взялась игрушка? Не я её придумал, мне её подарила Анна Феликсон, которая, в свою очередь, про неё узнала от Саула Шлеймера и сама сконструировала тот вариант, который мне достался. Когда эта статья была сдана в печать, я узнал от Григория Гальперина, что эта игрушка описана в книге Б. Н. Делоне[3)].

[3)] *Делоне Б. Н.* Краткое изложение доказательства непротиворечивости планиметрии Лобачевского. М.: АН СССР, 1953. С. 111–112.

Я выражаю всем троим свою благодарность, особенно Анне, из за которой возникла эта заметка, а также неизвестному мне геометру, который эту модель придумал.

§ 9. Заключение

Читатель, возможно, удивился, что в этой статье, посвящённой геометрии Лобачевского, не сказано ни слова про аксиомы геометрии — евклидовой и неевклидовой. Это объясняется, во-первых, тем, что применение известных мне строгих (в современном смысле) изложений геометрии Лобачевского для доказательства содержательных теорем требует огромной предварительной работы (доказательства очень формализованных, скучных и не очень естественных утверждений).

Во-вторых, я считаю, что гениальную идею Евклида построения геометрии как дедуктивной системы — одно из высших достижений человеческого разума, идею, из которой в итоге возникло современное построение всей математики — сегодня скорее следует отнести к *истории геометрии*, а не к самой геометрии. Евклидова планиметрия — в наши дни лишь небольшая часть единой математики. Доказывать её теоремы на основании аксиом Гильберта крайне неудобно и непедагогично, проще это делать исходя из элементарной линейной алгебры.

Однако и такой подход, особенно когда линейная алгебра и евклидово пространство изучаются в координатах, мне (как и большинству геометров) тоже не по душе. Именно поэтому в нашей статье рассматривался подход Клейна к построению геометрических теорий. Читатель мог убедиться на примерах моделей плоскости Лобачевского, что этот подход, по своей наглядности и строгости, наиболее близок сердцу истинного геометра.

Алексей Брониславович Сосинский, НМУ
asossinsky@yandex.ru