КУСОЧНО ГЛАДКОЕ ВЛОЖЕНИЕ КУБА

М. И. Штогрин

Для разверток неотрицательной кривизны, гомеоморфных сфере $\mathbb{S}^2$, А. Д. Александров [1] доказал теорему существования реализации каждой из них в виде поверхности выпуклого многогранника в $\mathbb{R}^3$ и теорему единственности реализации в классе выпуклых многогранников. С. П. Оловянишников [2] доказал единственность реализации в классе всех выпуклых тел[1]. Помимо единственного выпуклого вложения в $\mathbb{R}^3$ для каждой развертки существует сколь угодно много невыпуклых полиэдральных вложений, и в каждом из них все грани являются выпуклыми многоугольниками [3]. В настоящей работе дан пример кусочно гладкого[2], но не кусочно линейного [4] вложения поверхности выпуклого многогранника в $\mathbb{R}^3$.

Вложение. На кусочно гладкой поверхности P (см. рис. 1a)) изобразим четыре декоративных ребра, рис. 1b); получим естественное подразделение поверхности P на шесть кусков – четыре расположены на круговых цилиндрах, два – в плоскостях. Радиус каждого кругового цилиндра равен 1; фронтальные проекции всех цилиндрических кусков суть трапеции, каждая с углом $\pi/4$, см. рис. 1c); горизонтальные проекции двух цилиндрических кусков и поверхности P совпадают; профильные проекции двух других цилиндрических кусков и поверхности P совпадают. Плоские куски – это два квадрата, параллельные фронтальной плоскости, с совпадающими проекциями на ней; сторона квадрата равна π; расстояние между квадратами равно 2.

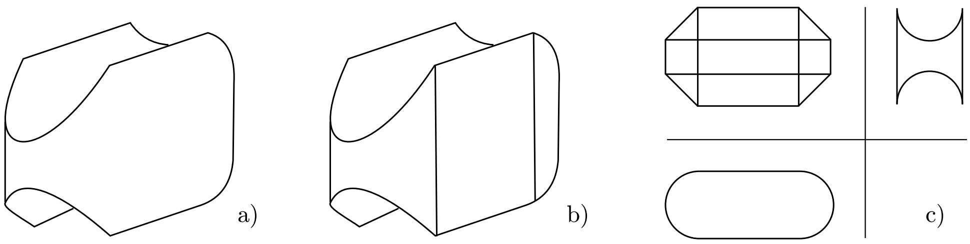

Рис. 1

Гладкость. Каждый из шести кусков поверхности P на рис. 1b) является гладким (класса C^∞). В точках декоративных ребер поверхность P также является гладкой (класса C^1). В целом поверхность P состоит их трех гладких кусков, см. рис. 1a).

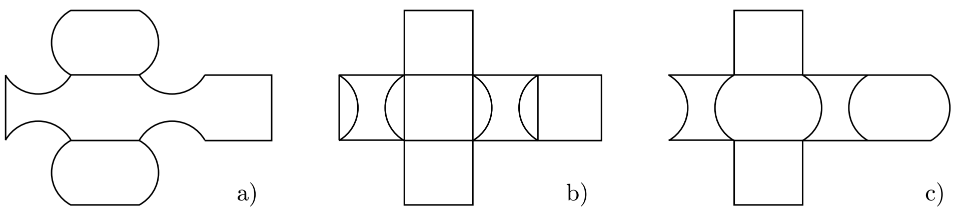

Рис. 2

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 02-01-00803), Фонда поддержки ведущих научных школ (грант НШ-2185.2003.1) и Программы ОМН РАН “Современные проблемы теоретической математики”.

[1] Выпуклое вложение поверхности выпуклого многогранника в $\mathbb{R}^3$ всегда является полиэдром.

[2] Невыпуклое вложение поверхности выпуклого многогранника не всегда является полиэдром.

Развертка поверхности P без декоративных ребер (рис. 1a)) представлена на рис. 2a), а с декоративными ребрами (рис. 1b)) – на рис. 2c). На рис. 2b) представлена традиционная развертка куба, но кроме шести квадратов нарисованы еще четыре стандартные синусоиды – точно такие же, как на развертке поверхности P, см. рис. 2c). В целом на рис. 2b) изображено изометрическое наложение развертки поверхности P, см. рис. 2c), на развертку поверхности куба.

Обоснование. Рассмотрим в $\mathbb{R}^3$ прямой круговой цилиндр радиуса 1, рис. 3a). Его косое плоское сечение является эллипсом. Если угол наклона плоскости к оси цилиндра равен $\pi/4$, см. рис. 3b), то во внутренней метрике цилиндра (а точнее, на универсальной накрывающей цилиндра) сечение представляет собою стандартную синусоиду. Плоскость сечения делит цилиндр на две части, рис. 3b). Оставив одну часть на месте, зеркально отразим другую часть от плоскости сечения, получим изломанный цилиндр, см. рис. 3c). Во всех точках излома кривизна поверхности остается нулевой. Изломанный круговой цилиндр не является ни вложением, ни погружением кругового цилиндра, так как в двух его точках имеются зонтики Уитни. Однако изломанный полукруговой цилиндр, рис. 3d), является изометрическим вложением полукругового цилиндра. Если развернуть изломанный полукруговой цилиндр на плоскость, то линия излома изобразится в точности одной аркой стандартной синусоиды (ее ширина равна π, а высота равна 1).

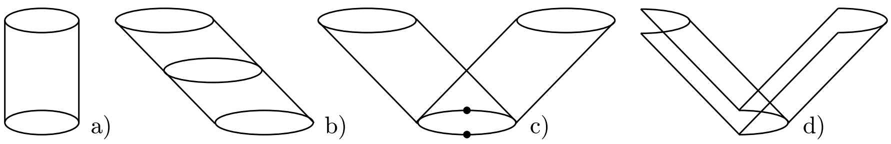

Рис. 3

Модель из листа бумаги удобно строить по второй развертке, рис. 2c); синусоиды следует нарисовать шариковой ручкой, сильно надавливая на бумагу, чтобы получился глубокий след. Модель из металлической пластинки лучше строить по первой развертке, рис. 2a). Телесную модель с поверхностью P можно выточить из деревянного бруска (его размеры: длина $\pi + 2$, ширина 2, высота π). Это изометрическое вложение поверхности куба в $\mathbb{R}^3$.

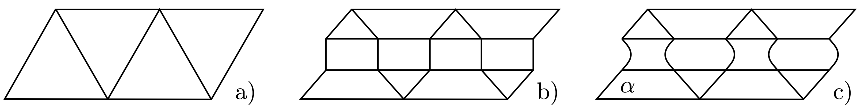

Рис. 4

Дополнение. Куб в примере можно заменить на прямую квадратную призму. На рис. 4a) изображена развертка правильного тетраэдра; на рис. 4b) – развертка невыпуклой полиэдральной поверхности с выделенной на ней боковой поверхностью квадратной призмы; на рис. 4c) – развертка кусочно гладкой поверхности с четырьмя цилиндрическими кусками вместо боковой поверхности призмы (так же, как на рис. 2c)). Все три развертки изометричны. Получено кусочно гладкое вложение поверхности правильного тетраэдра в $\mathbb{R}^3$. Меняя угол трапеции α, получим континуум разных вложений, $\pi/4 < \alpha < \pi/3$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[**1**] А. Д. Александров. Выпуклые многогранники. М.–Л.: Гостехиздат, 1950. [**2**] С. П. Оловянишников // Матем. сб. 1946. Т. 18. №3. С. 441–445. [**3**] М. И. Штогрин // Международная конференция, посвященная столетию Л. В. Келдыш. Тезисы докладов: Дискретная геометрия и алгебраическая топология (Москва, 2004). С. 39–40. [**4**] К. Рурк, Б. Сандерсон. Введение в кусочно линейную топологию. М.: Мир, 1974.

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
E-mail: stogrin@mi.ras.ru

Принято редколлегией
23.07.2004