

**СПЕЦИАЛЬНЫЕ ИЗОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ
ПОВЕРХНОСТЕЙ ПЛАТОНОВЫХ ТЕЛ**

М. И. ШТОГРИН

Специальные изометрические преобразования цилиндрической поверхности открыл и исследовал А. В. Погорелов [1; §3, п. 1]. Они обладают определенной правильностью строения. Для их описания рассматривается вспомогательная правильная призма с четным числом сторон. Обозначим ее через Π . Она обладает вертикальной осью. На ее боковых гранях строятся конгруэнтные гладкие кривые $\gamma_1, \dots, \gamma_{2n}$, см. [1; рис. 12], на которые натягиваются цилиндрические поверхности $Z_{12}, Z_{23}, \dots, Z_{2n-1 2n}, Z_{2n 1}$ с горизонтальными образующими, см. [1; рис. 13]. Все вместе они составляют поверхность Z , изометричную *цилиндрической* поверхности. Пусть каждая кривая γ_i в любой своей точке имеет нулевую кривизну, т.е. каждая ребристая линия γ_i реально представляет собою прямолинейное ребро $\ell_i, i = 1, \dots, 2n$. Тогда мы получим следующие три естественных частных случая:

- (1) если отрезок ℓ_i разбивает грань призмы Π на два равных прямоугольника, то поверхность Z представляет собою правильную призму, обозначим ее через P , см. рис. 1;
- (2) если отрезок ℓ_i разбивает грань призмы Π на две равных трапеции, то поверхность Z состоит из конгруэнтных равнобоких трапеций, обозначим ее через T , см. рис. 2;
- (3) если отрезок ℓ_i разбивает грань призмы Π на два равных треугольника, то поверхность Z представляет собою антипризму, обозначим ее через A , см. рис. 3.

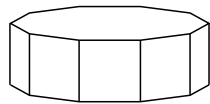


Рис. 1. P

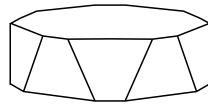


Рис. 2. T

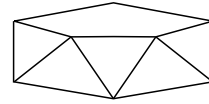


Рис. 3. A

В случае (2) отрезок ℓ_i может пробегать все промежуточные положения (вакансии) между двумя крайними положениями (1) и (3). Однако, среди бесконечного числа этих вакансий для отрезка ℓ_i в предельном случае мы выберем и зафиксируем только *одну* из них.

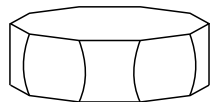


Рис. 4. $Z(P)$

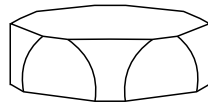


Рис. 5. $Z(T)$

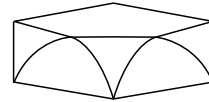


Рис. 6. $Z(A)$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Изометричная цилиндру кусочно-линейная поверхность Z как пояс натянута на прямолинейные боковые ребра ℓ_i с плавающими вдоль краев призмы Π концами. При изменении положений отрезков ℓ_i на гранях призмы Π вложение цилиндрической поверхности в \mathbb{R}^3 остается изометрическим [1]. При вращениях отрезков ℓ_i вокруг центров граней мы получаем однопараметрическое изгибание поверхности T в \mathbb{R}^3 . Двум крайним значениям параметра соответствуют изометричные поверхности P и A .

Теперь, следуя [1], в каждом конкретном случае (1), (2) или (3) построим гладкие кривые γ_i вновь, причем так, чтобы на этот раз они обладали *общими концами* с уже выбранными на гранях призмы Π отрезками ℓ_i (см. рис. 1, 2, 3 и рис. 4, 5, 6 соответственно). Если опять во всех точках кривой γ_i мы будем непрерывно уменьшать кривизну, устремляя ее к нулю, то деформируемая ребристая линия γ_i в пределе выпрямится в прямолинейное ребро ℓ_i . А так как при изменении кривой γ_i вложение цилиндрической поверхности в \mathbb{R}^3 остается изометрическим [1], то

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 05-01-00170), Совета по грантам Президента РФ для поддержки ведущих научных школ (грант НШ-2185.2003.1) и программы ОМН РАН “Современные проблемы теоретической математики”.

мы получим пример непрерывного изгибания поверхности Z в \mathbb{R}^3 . В результате данного изгибания кусочно гладкая поверхность Z превратится в кусочно линейную поверхность P в случае (1), T в случае (2) или A в случае (3).

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В процессе непрерывного изгибания концы переменных криволинейных ребер γ_i закреплены на поверхности Z и к краям поверхности Z можно приклеить два основания, превратив ее в *замкнутую* поверхность неотрицательной кривизны. В первых двух случаях замкнутая поверхность имеет 2 плоские $2n$ -угольные грани, $2n$ кривых 4-угольных граней, $4n$ прямолинейных ребер, $2n$ криволинейных ребер, $4n$ вершин. В третьем случае замкнутая поверхность имеет 2 плоские n -угольные грани, $2n$ кривых 3-угольных граней, $2n$ прямолинейных ребер, $2n$ криволинейных ребер, $2n$ вершин. Во всех трех случаях криволинейные ребра γ_i (не геодезические на Z) возникли не вдруг, а взамен прямолинейных ребер ℓ_i (геодезических на Z). Особенность процесса изгибания состоит в том, что ребристая линия γ_i на гребне волны плавно перекачивается вдоль пояса Z . (См. непрерывное изгибание в случае зеркального выпучивания выпуклой поверхности [1; с. 45].)

Применим сказанное к поверхностям платоновых тел. A именно, пусть плоское сечение поверхности, перпендикулярное оси симметрии платонова тела, не содержит вершин тела и при этом является замкнутой геодезической линией на поверхности. Тогда все рассматриваемые параллельные сечения составляют *пояс*, вырезаемый из поверхности двумя крайними параллельными плоскостями, проходящими через вершины тела. Как оказалось, пояс имеет вид одной из поверхностей P , T или A . В самом деле, на поверхности куба пояс с осью 4-го порядка – это призма P . На поверхности додекаэдра пояс с осью 3-го порядка – это поверхность T . На поверхности тетраэдра, октаэдра, куба, додекаэдра, икосаэдра пояс с осью 2-, 3-, 3-, 5-, 5-го порядка соответственно – это антипризма A .

Далее, кусочно линейный пояс P , T или A , принадлежащий поверхности платонова тела, заменим на изометричный кусочно гладкий пояс $Z = Z(P)$, $Z = Z(T)$ или $Z = Z(A)$, см. рис. 4–6. На всех трех рисунках крайняя левая (правая) ребристая линия γ_i проектируется в прямолинейный отрезок. Получим кусочно гладкое вложение поверхности платонова тела в \mathbb{R}^3 . Во всех случаях пояс Z имеет кривые боковые ребра γ_i . В трех случаях на поверхности возникают новые прямолинейные ребра: их 10 в случае пояса с осью 5-го порядка для додекаэдра, их по 6 в случае пояса с осью 3-го порядка для додекаэдра и куба.

И, наконец, если во всех точках гладких кривых γ_i пояса Z устремить кривизну ребристой линии γ_i к нулю, то кривые ребра γ_i (они не геодезические на поверхности Z ; они произвольно¹ выбираются в плоскостях боковых граней призмы Π , см. [1]) с закрепленными концами (концы переменных ребер γ_i закреплены на изгибаемом поясе Z , а не в объемлющем пространстве \mathbb{R}^3) продеформируются в прямолинейные ребра ℓ_i (геодезические на поверхности Z). Получим непрерывное кусочно гладкое изгибание поверхности платонова тела с плавно меняющимся в \mathbb{R}^3 поясом Z с переменными кривыми ребрами γ_i .

ТЕОРЕМА. *Поверхности платоновых тел допускают кусочно гладкие изгибания.*

Случай оси 2-го порядка для тетраэдра является особым, так как пояс представляет собою особую антипризму A : ее основания вырождены – это два противоположных ребра тетраэдра. Однако данный пояс A можно заменить на кусочно гладкий пояс $Z(A)$. Значит, тетраэдр допускает непрерывное изгибание, при котором два противоположных ребра остаются прямолинейными, а четыре остальных ребра деформируются в криволинейные. Получены сугубо кусочно гладкие вложения поверхности тетраэдра в трехмерное евклидово пространство \mathbb{R}^3 . Они без линейных участков: все четыре треугольные грани нелинейные. Этим они отличаются от других вложений, представленных выше и в [2].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] А. В. Погорелов. Изгибания поверхностей и устойчивость оболочек. Киев: Наукова думка, 1998. [2] М. И. Штогрин // УМН. 2004. Т. 59. № 5. С. 167–168.

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
E-mail: stogrin@mi.ras.ru

Представлено В. М. Бухштабером
Принято редколлегией 23.05.2005

¹Речь идет о произволе в выборе образа в \mathbb{R}^3 , а не прообраза на абстрактном цилиндре.